

(6) 设区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, $f(x)$ 为 D 上正值连续函数, a, b 为常数,

则 $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma = (\quad)$

- A. $ab\pi$; B. $\frac{ab}{2}\pi$; C. $(a+b)\pi$; D. $\frac{a+b}{2}\pi$ 。

(7) 直线 $\begin{cases} 5x + y - 3z - 7 = 0 \\ 2x + y - 3z - 7 = 0 \end{cases}$ ()

- A. 垂直 yoz 平面; B. 平行 x 轴; C 在 yoz 平面内.; D. 在 xoy 平面内。

(8) 微分方程 $y'' - 2yy'^3 = 0$ 满足条件 $y'(0) = -1, y(0) = 1$ 的解是()

- A. $\frac{y^3}{3} = x + \frac{1}{3}$; B. $\frac{x^3}{3} = y - 1$; C. $\frac{y^3}{3} = -x + \frac{1}{3}$; D. $\frac{x^3}{3} = -y + 1$ 。

二、填空题：(共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分) 请将答案写在答题纸指定位置上。

(9) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\sin(xy) + 3x + y = 1$ 所确定, 则 $dy|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(10) 设 $y = \lim_{x \rightarrow \infty} t(1 + \frac{1}{x})^{2tx}, x = t^2 + t$, 则 $\frac{dy}{dx} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(11) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin x^2 \cdot \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(12) 方程 $x^2 + 4x^6 - 1 = 0$ 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个实根。

(13) 过原点且与两直线 $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t \end{cases}$ 及 $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行的平面方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(14) 设其中 D 由 $y = \sqrt{x}$ 和 $y = x$ 围成, 则 $\iint_D \frac{\sin y}{y} d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、解答题：(15)–(22) 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

(15) (本题满分 11 分)

证明: 当 $x \geq 1$ 时, 恒等式 $2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi$ 成立。

(16) (本题满分 11 分)

计算积分 $\int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$.

(17) (本题满分 12 分)

设平面图形由抛物线 $x = \frac{y^2}{2} + 2$ 与过抛物线上点(4,2)的法线及x轴, y轴所围成.

(1) 求此平面图形的面积; (2) 求该平面图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积。

(18) (本题满分 12 分)

求 $I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$, 其中 D 为 $x^2 + y^2 \leq 4$ 和 $(x+1)^2 + y^2 \geq 1$ 所围区域。

(19) (本题满分 12 分)

设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 又函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由下列两式确

定 $e^{xy} - xy = 2$ 和 $e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt$, 求 $\frac{du}{dx}$

(20) (本题满分 12 分)

设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导, 且 $f(0) = 0$,

证明: 在 $(0, 1)$ 内存在一点 c , 使 $cf'(c) + 2f(c) = f'(c)$.

(21) (本题满分 12 分)

证明不等式 $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{\ln a} < \frac{1}{n^2}$, ($a > 1, n \geq 1$).

(22) (本题满分 12 分)

求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = 3xe^{-x}$ 的通解。