

东华理工大学 2018 年硕士生入学考试初试试题

科目代码： 818 ； 科目名称： 《高等代数》； ( A 卷)

适用专业（领域）名称： 070100 数学

一、（本题 15 分）

设  $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}$ ,  $g(x) = (f(x) + x^n)^2 - x^n$ , 证明:  $f(x) | g(x)$ .

二、（本题 20 分）

设  $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$ ,  $g(x) = x^2 - 2$ , 且  $\alpha, \beta, \gamma$  是  $f(x)$  的根, 求一个整系数多项式, 使其以  $g(\alpha), g(\beta), g(\gamma)$  为根。

三、（本题 15 分）

设  $a_1, a_2, \dots, a_n$  为  $n$  个实数, 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_1^2 + 1 & a_1 a_2 + 1 & \dots & a_1 a_n + 1 \\ a_2 a_1 + 1 & a_2^2 + 1 & \dots & a_2 a_n + 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n a_1 + 1 & a_n a_2 + 1 & \dots & a_n^2 + 1 \end{pmatrix}$$

计算行列式  $|A|$ .

四、（本题 15 分）

设  $A, B$  为 3 阶矩阵,  $|A| = 3, |B| = 2, |A^{-1} + B| = 2$ , 计算  $|A + B^{-1}|$ .

五、（本题 15 分）

设 3 阶实矩阵  $A = \begin{pmatrix} a & -1 & ax - y \\ 1 & a & x + ay \\ b & c & bx + cy \end{pmatrix}$ , 求  $A$  的秩。

六、（本题 25 分）

已知非齐次线性方程组  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ ax_1 + x_2 + 3x_3 + bx_4 = 1 \end{cases}$  有 3 个线性无关的解,

(1) 证明方程组系数矩阵  $A$  的秩  $r(A) = 2$ ;

(2) 求  $a, b$  的值及方程组的通解。

七、(本题 10 分)

设  $A, E-A, E-A^{-1}$  均可逆，证明： $(E-A)^{-1} + (E-A^{-1})^{-1} = E$  .

八、(本题 15 分)

设  $A$  为  $n$  阶方阵， $|A|=18$ ， $3A+A^*=15E$ ，其中  $A^*$  为  $A$  的伴随矩阵

- (1) 求  $A$  的一个零化多项式；
- (2) 求  $A$  的最小多项式  $m(\lambda)$ ；
- (3) 求  $A$  的若当标准形。

九、(本题 20 分)

设  $W, W_1, W_2$  是线性空间  $V$  的 3 个子空间， $V = W_1 \oplus W_2$ ，若  $W_1 \subseteq W$ ，证明：

$$\dim W = \dim W_1 + \dim(W_2 \cap W) .$$